6.1 Schema des indirekten Beweises

Zuerst kommt die zu beweisende BEHAUPTUNG

$\Downarrow$

Dann macht man die ANNAHME, das Gegenteil sei wahr

$\Downarrow$

Daraus zieht man Folgerungen, die zu einem WIDERSPRUCH führen

$\Downarrow$

Dieser Widerspruch entsteht aus der gemachten Annahme. Also muß diese falsch sein, d.h. die Behauptung stimmt doch.

6.2 Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ist rational. $m, n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $2 = \frac{m^2}{n^2}$.
Also $m^2 = 2n^2$.
Primfaktorzerlegung[1] von m und n ergibt $(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_p)^2 = 2 \cdot (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_q)^2$.
Also ist $m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot \ldots \cdot m_p^2 = 2 \cdot n_1^2 \cdot n_2^2 \cdot \ldots \cdot n_q^2$.
Es kommen also alle Primfaktoren von m in m^2 doppelt vor.
Also ist $m_1 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_p \cdot m_p = 2 \cdot n_1 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_q \cdot n_q$.
Auf der einen Seite hat man dann also $p + p = 2p$ Primfaktoren, also eine gerade Anzahl und auf der anderen $1 + 2q$ Primfaktoren, also eine ungerade Anzahl.
Da die Primfaktoren einer Zahl eindeutig festgelegt sind, ist dies ein Widerspruch. Es ist $m^2 \neq 2n^2$.
Damit ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl.

Damit kann man $\sqrt{2}$ nicht als endlichen Dezimalbruch schreiben.

[1] Primfaktordarstellung von m: $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_p$ m ist das Produkt von p Primzahlen. z.B. $m = 312$, Also $312 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_5$.
Für n analog mit q Primzahlen.