Unter einem schrägen Wurf, auch schiefer Wurf genannt, versteht man die Überlagerung (Superposition) einer gleichförmigen Bewegung mit bestimmter Abwurfgeschwindigkeit schräg nach oben und des freien Falls. Als Bahnkurve ergibt sich eine Wurfparabel (siehe Abbildung 1).

Abb. 1: Wurfparabel

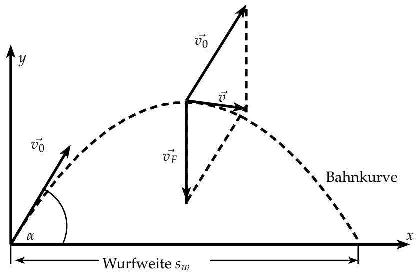
Für die Geschwindigkeiten in $x-$Richtung und in $y-$Richtung (siehe Abbildung 2) erhält man:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$
$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \qquad (2)$$

Für die Wege in $x-$ und $y-$Richtung gilt:

$$s_x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \qquad (3)$$
$$s_y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) kann man die Bahnkurvengleichung ableiten, indem man die Gleichung (3) nach t auflöst und in (4) einsetzt:



$$t = \frac{s_x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Einsetzen in (4) liefert:

$$\begin{aligned} s_y &= v_0 \cdot \left(\frac{s_x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right) \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{s_x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 \\ &= \tan\alpha \cdot s_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} s_x^2 \qquad (5) \end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung für eine nach unten geöffnete Parabel.
Ihr höchster Punkt (der Scheitelpunkt) zeichnet sich dadurch aus, dass der Körper in diesem Punkt in $y-$Richtung die Geschwindigkeit $v_y = 0$ besitzt, weil sich im Scheitelpunkt gerade die Bewegungsrichtung in $y-$Richtung umdreht:

$$\begin{aligned} v_y &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad v_0 \cdot \sin\alpha - g t_s &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad t_s &= \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \qquad (6) \end{aligned}$$

Dies ist die **Steigzeit**. Setzt man diese in (4) ein, so erhält man die **Steighöhe $\mathbf{s_h}$**:

$$\begin{aligned} s_h &= v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right) \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{g} \qquad (7) \end{aligned}$$

➭ **Für welchen Winkel ist die Steighöhe s_h besonders groß?**

Von Bedeutung ist beim schrägen Wurf auch noch die Wurfweite s_w. Die Wurfweite ergibt sich

Rendtel, 03.06.2009

aus Gleichung (5) mit $s_y = 0$:

$$\tan\alpha \cdot s_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} s_x^2 = 0$$

Durch Ausklammern von s_x erhält man:

$$s_x \cdot \left(\tan\alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} s_x \right) = 0$$

Damit ist die erste Lösung $s_x = 0$. Dies ist der Abwurfpunkt. Als zweite Lösung erhält man:

$$\tan\alpha - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} s_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_x = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g}$$

Mit $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ erhält man:

$$\begin{aligned} s_w &= \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{g \cdot \cos\alpha} \\ &= \frac{2v_0^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \end{aligned}$$

➩ **Für welchen Winkel ist die Wurfweite s_w besonders groß?**

10.1 Aufgaben

1. (a) Berechne die Wurfweiten und Fallwege der waagerechten Würfe für $v_0 = 5\,\text{m / s}$ bzw. 10 m/s nach $t = 0,1$ s; 0,5 s; 1,0 s; 1,5 s; 2,0 s. Zeichne die Bahnkurven.
   (b) Berechne dazu Wurfweiten und Wurfzeiten, wenn die geworfenen Körper 5 m; 10 m gefallen sind.
2. Ein Geschoss verlässt ein Gewehr mit der Geschwindigkeit $v_0 = 780\,\text{m / s}$.
   Welche Höhe und Weite erreicht das Geschoss, wenn es unter den Winkeln 90°, 60°, 45°, 30° zur Waagerechten abgeschossen wird?
3. Ein Wasserstrahl, der unter einem Winkel von 40° zur Horizontalen die Düse eines Gartenschlauchs verlässt, erreicht das in 30 m Entfernung stehende Buschwerk in gleicher Höhe wie die Düse.
   (a) Mit welcher Geschwindigkeit verlässt der Strahl die Düse?
   (b) Wie groß ist die Gipfelhöhe des Wasserstrahls?
   (c) Welche Zeit benötigt ein einzelner Wassertropfen vom Verlassen der Düse bis zum Auftreffen?
4. Ein Motorrad fährt mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine unter dem Winkel α gegenüber der Horizontalen ansteigenden Rampe an einen Graben mit der Breite b heran und landet auf der gegenüberliegenden Seite des Grabens auf einem Plateau, das um die Höhe h höher gelegen ist als die höchste Stelle der Absprungrampe.
   (a) Bestimme bei gegebener Endgeschwindigkeit $v_0 = 50\,\text{km / h}$ auf der Rampe, bei gegebenem $\alpha = 30°$ und $b = 5,0\,\text{m}$ die obere Grenze für die Höhe h, bei der das Motorrad den Graben noch überspringen kann.
   (b) Wie groß muss die Geschwindigkeit v_0 mindestens sein, wenn die Höhe $h = 1,0\,\text{m}$ beim Winkel $\alpha = 20°$ und der Breite $b = 5,0\,\text{m}$ erreicht werden soll?
   Vernachlässige die Ausmaße des Motorrads und löse die Aufgabe allgemein und mit Zahlenwerten.

Rendtel, 03.06.2009